数理解析研究所講究録
第162巻 1972年 97-108

ウルトラ超函数の特異性の分解について.

東大 理　森本光生

この小文の目的は，ウルトラ超函数の（整函数を法としての）特異性の分解に関するいくつかの結果を報告することである．我々のこの理論は，佐藤超函数に対する層Cの理論と平行している．（層Cに関しては，[3]および[4，5]を参照されたい．）ウルトラ超函数（ultra-hyperfunction）は，[2]においてultradistribution cohomologiqueの名前で呼ばれていたことを注意しておく．

Vをn次元実ユークリッド空間とし，その複素化を$V_{\mathbb{C}} = V \times \sqrt{-1}\,V$で表わす．$\mathcal{O}$を，$V_{\mathbb{C}}$上の正則函数芽のなす層とする．$V_{\mathbb{C}}$の開集合$\Omega$に対し，$\mathcal{O}(\Omega)$で，$\Omega$上の正則函数全体のなす空間を表わす．$V_{\mathbb{C}}$の局所閉集合$F$に台をもち，層$\mathcal{O}$に係数をもつ$k$次の相対コホモロジー空間を，

$$H^k[F] \cong H^k_F(\Omega\,;\mathcal{O})$$

で表わす．ただし，Ω は F をその閉集合として含む $V_{\mathbb{C}}$ の開集合である．V 上のウルトラ超函数のなす空間 $\mathcal{U}(V)$ とは，コンパクト凸な底をもつ柱状領域に台をもち，$\mathcal{O}$ に係数をもつ n 次の相対コホモロジー空間の帰納的極限であると定義する．すなわち，

$$\mathcal{U}(V) = \operatorname*{lim\,ind}_{G \subset\subset V} H^n[T(G)]$$

である．ここで $T(G) = V \times \sqrt{-1}\,G$，かつ帰納的極限は，$G$ が V のコンパクト凸集合を動くとき，自然な写像

$$H^n[T(G)] \longrightarrow H^n[T(G')]\,, \quad G \subset G'$$

に従って考えられているのである．我々は，論文［２］において，ウルトラ超函数の空間 $\mathcal{U}(V)$ は，$V_{\mathbb{C}}$ 上の解析的汎函数の空間 $\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})'$ および V 上の佐藤超函数の空間 $\mathcal{B}(V) = H^n[T(0)]$ をその部分空間として含むことを示した．ここで，$T(0) = V \times \sqrt{-1}\,0 = V$ である．

V^* でベクトル空間 V の双対空間を表わし，$\langle\ ,\ \rangle$ で $V \times V^*$ 上の標準的な内積を表わす．V^* の原点を端点にもつ半直線の全体を S^*_∞ で表わす：

$$S^*_\infty = (V \setminus \{0\})/\mathbb{R}^+.$$

S_∞^* は，$n-1$ 次元球面と同相であり，"無限遠余球" とでも呼ばれるべきものである．$\xi \in V^*$, $\xi \neq 0$ に対し，ξ_∞ で V^* の原点を端点とし ξ を通る半直線を表わす．写像 $\xi \longmapsto \xi_\infty$ は，標準的射影

$$p : V^* \setminus (0) \longrightarrow S_\infty^*$$

と一致する．S_∞^* の部分集合 I が凸であるとは，錐 $p^{-1}(I)$ が凸なることと定義する．$D(I)$ で，S_∞^* の部分集合 I の（非正）双対錐を表わす：

$$D(I) = \{x \in V \,;\, \langle x, \xi \rangle \leqq 0,\ \forall \xi \in p^{-1}(I)\}.$$

もし $I \supset J$ であれば，$D(I) \subset D(J)$ である．$x \in V$ に対し，$D(I)+x$ で $D(I)$ を x だけ平行移動して得られる錐を表わす．S_∞^* の凸閉集合 I に対し，

$$\Phi_1(I) = \varinjlim_{x \in V} H^n[T(D(I)+x)]$$

とおく．ただし，帰納的極限は自然な写像

$$H^n[T(D(I)+x)] \longrightarrow H^n[T(D(I)+x')],$$
$$T(D(I)+x) \subset T(D(I)+x')$$

に従ってとられる．もし I と J が S_∞^* の２つの凸閉集合で，$I \supset J$ なるものとすると，写像

$$p_J^I : \Phi_1(I) \longrightarrow \Phi_1(J)$$

が，自然な写像

$$H^n[T(D(I)+x)] \longrightarrow H^n[T(D(J)+x)]$$

の帰納的極限として定義される．写像ρ^I_Jが"鎖"の条件をみたすことは明らかである．また，S^*_∞の凸開集合の全体は，S^*_∞の開集合の族の基底をなすから，$\Psi_1(I)$とρ^I_JはS^*_∞上の準層Ψ_1を定める．準層Ψ_1に対応する層をΨと書く．これらの準層，層は$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$－加群の構造をもっている．層$\Psi$に対し次の定理が成立する．

定理1　S^*_∞の凸開集合I上の層Ψのセクションの空間$\Psi(I)$は次のようにして与えられる．

$$\Psi(I) = \lim_{I' \subset\subset I} \mathrm{proj}\ \Psi_1(I'),$$

ただし，I'はIの相対コンパクトな部分集合で凸開集合なるもの全体を動く．

我々の層Ψは，ウルトラ超函数の（整函数を法とした）特異性を特徴付けるのに役立つ．整函数fは次のようにして1つのウルトラ超函数$\rho(f)$と同一視することができる：

$$\rho : \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow[\text{制限}]{} \mathcal{A}(V) \hookrightarrow \mathcal{B}(V) \hookrightarrow \mathcal{U}(V).$$

ここで，$\mathcal{A}(V)$はV上の実解析函数全体のなす空間を表わす．上の三つの写像は単射であるから，その合成写像ρ

もまた単射である．このρにより$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$を$\mathcal{U}(V)$の部分空間とみなすのである．

今度は，$\mathcal{U}(V)$から，S^*_∞上のΦのセクションの空間$\Phi(S^*_\infty)$の中への写像σを構成しよう．Vのコンパクト凸集合Gと，S^*_∞の本質的に凸な開集合Iに対して，Vの点xで$G \subset D(I)+x$を満足するものが存在する．したがって，自然な写像

$$H^n[T(G)] \longrightarrow H^n[T(D(I)+x)]$$

が定義され，これの帰納的極限として写像

$$\sigma_I : \mathcal{U}(V) \longrightarrow \Phi(I)$$

が定義される．もしJを別のS^*_∞の本質的に凸な開集合とすると次の可換図式が成立する．

$$\begin{tikzcd}
 & \Phi(I) \arrow[dr, "\rho^I_{I\cap J}"] & \\
\mathcal{U}(V) \arrow[ur, "\sigma_I"] \arrow[dr, "\sigma_J"'] & & \Phi(I\cap J) \\
 & \Phi(J) \arrow[ur, "\rho^I_{I\cap J}"'] &
\end{tikzcd}$$

したがって写像σ_Iをはり合わせて，写像

$$\sigma : \mathcal{U}(V) \longrightarrow \Phi(S^*_\infty)$$

が定義できる．このとき次の定理が成立する．

定理2　次の $\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$-加群の準同型の系列は完全である:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\rho} \mathcal{U}(V) \xrightarrow{\sigma} \Phi(S^{*}_{\infty}) \to 0.$$

S_0 で，V の原点を端点とする半直線の全体を表わす．自然に S_0 は $n-1$ 次元球面と同相になる:

$$S_0 = (V \setminus (0)) / \mathbb{R}^{+}.$$

S_0 は "無限小球" とでも呼ばれるべきものである．$x \in V$, $x \neq 0$ に対して，$x0$ で x を含む S_0 の元（すなわち半直線）を表わす．x に $x0$ を対応させる写像 q は，標準射影

$$q : V \setminus \{0\} \longrightarrow S_0$$

である．S_0 の部分集合 Γ が凸であるとは，錐 $q^{-1}(\Gamma)$ が凸なることと定義する．S_0 の凸開集合 Γ に対し，

$$\mathcal{P}_1(\Gamma) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ x \in V}} \mathrm{ind}\, \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma) + x))$$

とおこう．ただし，この帰納的極限は，制限写像

$$\mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma)+x)) \longrightarrow \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma)+x')),$$
$$T(q^{-1}(\Gamma)+x) \supset T(q^{-1}(\Gamma)+x')$$

に従ってとられている．Δ を S_0 の凸開集合で $\Gamma \supset \Delta$ なるものとする．このとき，写像

$$\varrho^{\Gamma}_{\Delta} : \mathcal{P}_1(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{P}_1(\Delta)$$

を，制限写像

$$\mathcal{O}(T(\varrho^{-1}(\Gamma)+x)) \longrightarrow \mathcal{O}(T(\varrho^{-1}(\Delta)+x))$$

の帰納的極限として定める．明らかに，$\mathcal{P}_1(\Gamma)$ と $\varrho^{\Gamma}_{\Delta}$ は S_0 上の準層 $\mathcal{P}_1$ を定義する．$\mathcal{P}$ で準層 $\mathcal{P}_1$ に同伴する層を表わす．S_0 の凸開集合 Γ 上の $\mathcal{P}$ のセクションの空間 $\mathcal{P}(\Gamma)$ は，次のように与えられる：

$$\mathcal{P}(\Gamma) = \lim_{\Gamma' \subset\subset \Gamma} \mathrm{proj}\ \mathcal{P}_1(\Gamma'),$$

ただし，ここで Γ' は Γ の相対コンパクト部分集合で凸開集合なるもの全体を動く．S_0 の連結開集合 Γ が，$\Gamma \cap (-\Gamma) \neq \phi$ なる条件をみたせば，$\mathcal{P}(\Gamma) = \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ となる．

コホモロジーの余境界写像として，"境界値"写像

$$\delta_{\Gamma} : \mathcal{P}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{U}(V)$$

を定義することができる．これに関して，次の定理が成立する：

定理3．S_0 の凸開集合 Γ に対し，Γ^* で S^*_∞ の凸開集合で，

$$\overline{(\varrho^{-1}(\Gamma))} = -D(\Gamma^*)$$

をみたすものが唯一つ存在する．ここで $\overline{(\ )}$ で $(\ )$ の閉包をあらわした．ウルトラ超函数 φ が，

1!!!

$$\delta_\Gamma : \mathcal{P}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{U}(V)$$

の像に属するための必要かつ十分条件は，$\sigma(\varphi)$ の台がΓ^*に含まれることである．

さて今度は，ΓがS_0の相対的に開いた凸集合としよう．すなわち，錐$g^{-1}(\Gamma)$が$g^{-1}(\Gamma)$の生成するVの線形部分多様体の中で開いているとする．codim Γで，上の線形部分多様体のVにおける余次元をあらわす．このとき，

$$H^k_\Gamma(S_0;\mathcal{P}) = \varinjlim_{x\in V} H^k[T(g^{-1}(\Gamma)+x)]$$

が成立する．また次の消滅定理が成立することも注意しておこう：

$$H^k_\Gamma(S_0;\mathcal{P}) = 0 \qquad k \neq \operatorname{codim}\Gamma.$$

このような一般な場合にも，"境界値" 作用素

$$\delta_\Gamma : H^{\operatorname{codim}\Gamma}_\Gamma(S_0;\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{U}(V)$$

が定義され　次の定理が成立する：

定理3′．ΓとS_0で相対的に開いた凸集合とする．ウルトラ超函数φが

$$\delta_\Gamma : H^{\operatorname{codim}\Gamma}_\Gamma(S_0;\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{U}(V)$$

の像に属するための必要かつ十分条件は，$\sigma(\varphi)$の台がΓ^*に含まれることである．

注意 層Φの部分層$\tilde{\Phi}$と層$\mathcal{P}$の部分層$\tilde{\mathcal{P}}$を次のように定義することができる: S^*_∞の凸開集合Iに対し,

$$\tilde{\Phi}(I) = H^n[T(D(I))]$$

とおく. S^*_∞の二つの凸開集合IとJで, $I \supset J$なるものに対し, 写像

$$\tilde{p}^I_J : \tilde{\Phi}(I) \longrightarrow \tilde{\Phi}(J)$$

を, 自然な写像

$$H^n[T(D(I))] \longrightarrow H^n[T(D(J))]$$

と定義する. このとき, $\tilde{\Phi}(I)$と$\tilde{p}^I_J$によって定義されるS^*_∞上の準層は層であり, 層Φの部分層である. 写像

$$\tilde{\sigma}_I : \mathcal{B}(I) \longrightarrow \tilde{\Phi}(I)$$

は, 自然な写像

$$H^n[T(0)] \longrightarrow H^n[T(D(I))]$$

として定義する. この写像$\tilde{\sigma}_I$とIを動かして"はり合わせ"て, 写像

$$\tilde{\sigma} : \mathcal{B}(V) \longrightarrow \tilde{\Phi}(S^*_\infty)$$

が定義できる. このとき, 次の系列は完全である:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(V_C) \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathcal{B}(V) \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \tilde{\Phi}(S^*_\infty) \longrightarrow 0$$

ここで, $\tilde{\rho}$は制限写像である. この系列を 定理1, また[3]の定理(5.1)の完全列と比較せよ.

S_0の凸開集合Γに対し,

$$\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma) = \mathcal{O}(T(g^{-1}(\Gamma)))$$

とおこう．制限写像

$$\tilde{g}^{\Gamma}_{\Delta} : \mathcal{O}(T(g^{-1}(\Gamma))) \longrightarrow \mathcal{O}(T(g^{-1}(\Delta))),$$

$$T(g^{-1}(\Gamma)) \supset T(g^{-1}(\Delta))$$

と共に考えることにより，$\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma)$ は準層 $\tilde{\mathcal{P}}$ を定義する．この準層 $\tilde{\mathcal{P}}$ は実は S_0 上の層であり，さらに前に定義した層 $\mathcal{P}$ の部分層であることが容易に判る．"境界値"写像

$$\tilde{\delta}_{\Gamma} : \tilde{\mathcal{P}}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{B}(V)$$

が，余境界作用素で定義される．超函数(hyperfunction) φ が，$\tilde{\delta}_{\Gamma}$ の像に属するための必要かつ十分条件は，$\hat{\sigma}(\varphi)$ の台が Γ^* に含まれることである．また，定理3′に相当する事実も成立する．

応用　いくつかの応用を記そう．定理2および3によれば，層 $\mathfrak{T}$ のセクション $\sigma(\varphi)$ の台がウルトラ超函数 $\varphi \in \mathcal{U}(V)$ の（整函数を法とした）特異性を特徴づけることができる．くさびの刃の型の定理が，ウルトラ超函数に対しても成立する．すなわち，我々の上述の定理より，直ちに次の定理がでる．

定理4　（くさびの刃）Γ_1 と Γ_2 を S_0 の2つの凸閉集合とする．Γ で Γ_1 と Γ_2 の凸包をあらわす．もし $f_1 \in \mathcal{P}(\Gamma_1)$

と $f_2 \in \mathcal{P}(\Gamma_2)$ が条件

$$\delta_{\Gamma_1}(f_1) = \delta_{\Gamma_2}(f_2) \qquad \text{in } \mathcal{U}(V)$$

を満足すれば，$f \in \mathcal{P}(\Gamma)$ が存在して，f の $\mathcal{P}(\Gamma_1)$ および $\mathcal{P}(\Gamma_2)$ への制限が各々 f_1 と f_2 一致する．もし，Γ が S_0 と一致していれば，f は整函数である．

層理を用いることにより，ウルトラ超函数に対して佐藤の基本原理 [4. 5] を示すことができる．次の定理の解析的部分は，コーシー・コヴァレフスカヤの定理よりみちびかれる．

定理5 $P(D)$ を m 次の定数係数線形偏微分作用素とし，$P_m(\xi)$ でその主部をあらわす．もしウルトラ超函数 φ が，偏微分方程式 $P(D)\varphi = 0$ をみたせば，

$$\mathrm{supp}\,\sigma(\varphi) \subset \{\xi_\infty \in S^*_\infty ; P_m(\xi) = 0\}$$

となる．supp は台をいみする．

系 もし $P(D)$ が楕円型であれば，$P(D)\varphi = 0$ を満足するウルトラ超函数 $\varphi \in \mathcal{U}(V)$ は，整函数である．

この系は，φ が超函数の場合には，[1] の定理 (VII, 1. 8) の証明の中に含まれている．

この小文にのせた結果の証明は，いずれ稿をあらためて詳述したい。また [6] はこの小文のフランス語訳である．

文献

[1] 小松彦三郎：佐藤超函数と定数係数線形偏微分方程式 東大セミナーノート No. 22 (1968)

[2] Morimoto, M.: Sur les ultradistributions cohomologiques. Ann. Inst. Fourier 19 (1970), 129-153.

[3] Morimoto, M.: Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec IA 17 (1970), 215-239.

[4] Sato, M.: Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations, Actes, Congrès intern. Math., 1970, Tome 2, 785-794.

[5] 佐藤幹夫-柏原正樹：超函数の構造. 数学の歩み 15 (1970), 9-71.

[6] Morimoto, M.: La décomposition de singularités d'ultradistributions cohomologiques. Proc. Japan Acad. 48 (1972) (近刊)